สหัส พรหมสิทธิ์

Chaos ในระบบเศรษฐกิจและปรากฏการณ์ธรรมชาติ

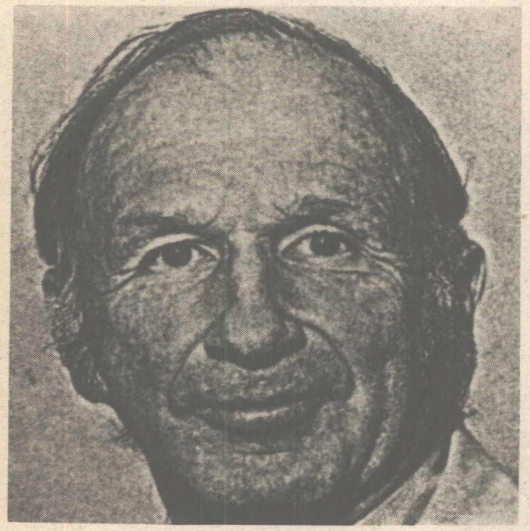
ความเป็นมาของทฤษฎี Chaos ในระบบเศรษฐกิจ และปรากฏการณ์ธรรมชาติ

ในปี 1961 นักอุตุนิยมวิทยาของ MIT ผู้มีนามว่าเอ็ดเวิร์ด ลอเร็นซ์ (Edward Loreng) ได้ทำการศึกษาสภาวะของลมฟ้าอากาศ โดยอาศัยคอมพิวเตอร์ซิมูเลชันและได้มีอยู่วันหนึ่งที่ลอเร็นซ์มีโอกาสนำ printout ของซิมูเลชันสำหรับเมื่อวันก่อนมาพิจารณาอย่างละเอียด เสร็จแล้วก็ตกลงใจที่จะใช้คอมพิวเตอร์ให้ทำการซิมูเลต (simulate) ซ้ำเหมือนกับที่ได้ทำในวันก่อน คอมพิวเตอร์โปรแกรมที่ลอเร็นซ์ใช้อยู่นั้น**สามารถให้คำตอบได้ละเอียดถึงทศนิยม 6 ตำแหน่ง** แต่จากการคำนวณทั้งสองครั้งคอมพิวเตอร์ก็สามารถให้รายละเอียดได้แค่เพียงทศนิยม 3 ตำแหน่ง (อันเนื่องจากว่าลอเร็นซ์ได้ใช้คำตอบจาก printout ที่มีทศนิยมแค่ 3 ตำแหน่งให้เป็น input) ซึ่งลอเร็นซ์คิดว่าไม่น่าเป็นเรื่องใหญ่ เพราะข้อผิดพลาดเพียงเล็กน้อย ซึ่งเกิดขึ้นตั้งแต่ทศนิยม**ตำแหน่งที่สี่**นี้จะสามารถหักล้างกันเองได้ในที่สุด แต่เมื่อได้วิ่ง**โปรแกรม**ใหม่อีกครั้ง ก็พบว่าคอมพิวเตอร์ได้ให้ตัวเลขแสดงสภาวะอากาศที่**แตกต่าง**จากการคำนวณในวันก่อน โดยในตอนแรกของการคำนวณที่เป็นซิมูเลชันนี้**ข้อแตกต่าง**ของคำตอบที่ได้ยังไม่มาก แต่เมื่อได้ทำซิมูเลชันต่อไปเรื่อย ๆ ข้อแตกต่างดังกล่าวก็เพิ่มมากขึ้นจนกระทั่งถึงจุดที่สภาวะอากาศที่ได้จากคอมพิวเตอร์ได้แตกต่างจากซิมูเลชันซึ่งได้กระทำในตอนต้นอย่างสิ้นเชิง อันเนื่องจากว่าการเปลี่ยนแปลงค่าของตัวเลขที่ถือว่าน้อยนิดซึ่งเกิดจากการใช้ทศนิยมเพียง 3 ตำแหน่ง ได้เป็นสิ่งที่ทำให้เกิดข้อแตกต่างของคำตอบจนเห็นได้ชัด ณ จุดนี้เองที่ลอเร็นซ์ได้พบหลักของ**คณิตศาสตร์ในเรื่องของ chaos** ว่า **"เหตุการณ์ที่ถือว่าเป็นเรื่องเล็กน้อยสามารถก่อให้เกิดผลที่ตามมาซึ่งเป็นเรื่องใหญ่มาก ๆ ได้"** (small events have enormous consequences) อย่างไรก็ตาม การค้นพบเช่นนี้ไม่ได้ทำให้ลอเร็นซ์ประหลาดใจมากนักเพราะความเป็นนักอุตุนิยมวิทยาที่ทำให้เขาต้องเป็นคนช่างสงสัยอยู่แล้ว โดยเฉพาะในเรื่องของลมฟ้าอากาศซึ่งต้องถือเป็นของธรรมดาว่าสาเหตุเล็ก ๆ นั้นสามารถส่งผลอันกว้างไกลได้ จนเป็นที่มาของสิ่งที่เรียกว่า "butterfly effect" ซึ่งหมายถึง**ความไวตัว**ต่อเงื่อนไขขั้นต้น (mitial conditions) จากจุดนี้ก็จะพูดถึงเรื่องของทฤษฎี chaos ซึ่งได้เข้ามาเกี่ยวข้องกับปรากฏการณ์ธรรมชาติ เช่น อุตุนิยมวิทยา

Chaos กับระบบเศรษฐกิจ

จุดมุ่งหมายของทฤษฎี chaos ก็คือ การศึกษา**สิ่งที่หาระเบียบมิได้** (randomness) ซึ่ง

Chaos ในระบบเศรษฐกิจ และปรากฏการณ์ธรรมชาติ



รูปที่ 1
นักอุตุนิยมวิทยา ผู้มีนามว่า Edward Loreng ซึ่งเป็นผู้พบหลักของ chaos เมื่อปี 1961

ส่วนใหญ่จะแฝงอยู่ในปรากฏการณ์ธรรมชาติ เช่นในเรื่องของ

- chaos and order in the capital market
- ความแปรปรวนของลมฟ้าอากาศหรือท้องทะเล
- การลอยวนขึ้นไปในอากาศของพวกหมอกควันต่าง ๆ
- การโบกสบัดของสิ่งที่เป็นแผ่นที่บางมาก ๆ เช่น ของพื้นธงในเวลาต้องลมกรรโชก รวมทั้งการม้วนตัวของคลื่นในมหาสมุทร
- การไหลของของไหลต่าง ๆ เป็นไปได้อย่างไร รวมทั้งความเป็นอัมพาตของการจราจรบนท้องถนน
- การเต้นเป็นจังหวะของหัวใจและสมอง ซึ่งไม่น่าจะเกี่ยวข้องกัน
- การเปลี่ยนแปลงจำนวนประชากรของสิ่งมีชีวิต เช่น สัตว์ต่าง ๆ
- ความไม่แน่นอนภายในสุริยจักรวาลที่คาดคะเนไม่ได้ รวมทั้งวิธีการจับกลุ่มของกาแล็กซี่ต่าง ๆ

ปรากฏการณ์ดังกล่าวในข้างต้น ถ้าดูเพียงผิวเผินแล้วก็ไม่น่าเกี่ยวข้องกันแต่อย่างใด เช่น จังหวะการเต้นของหัวใจและสมอง แต่ก็ได้มีการพบว่าเกี่ยวข้องสัมพันธ์กันจนได้ อันเป็นผลมาจากการที่นักวิทยาศาสตร์สามารถค้นพบความสัมพันธ์ของ**ความไม่มีระเบียบ** (irregularity) ชนิดต่าง ๆ จนนำไปสู่ความเข้าใจ**ในสิ่งที่คาดคะเนไม่ได้** (unpredictability) ตัวอย่างของ**ความสัมพันธ์ของความไม่มีระเบียบ**ที่นักวิทยาศาสตร์เห็นว่ามีความเกี่ยวข้องกันก็คือ ระบบที่อยู่ในรูปของสันทราย (sand dunes) กับระบบเศรษฐกิจรวมทั้งระบบที่เกี่ยวกับการทำงานของร่างกายของมนุษย์ และโครงสร้างขนาดใหญ่ที่เป็นจักรวาล จึงทำให้เห็นใจว่าน่าจะมีกลไกที่เรียกว่า **self-organization** ซึ่งแฝงอยู่ในความไม่มีระเบียบ (chaos) ซึ่งจะมีความเด่นชัดกว่า ความไม่มีระเบียบ (entropy) ที่เกิดจากกฎข้อที่สองของวิชา thermodynamics เรื่องราวของทฤษฎี chaos ที่กล่าวมาทั้งหมดนี้จะเกี่ยวข้องกับ complexity theory ในแง่ที่ว่า complexity theory (ซึ่งเป็นวิชาที่เติบโตมาจาก chaos theory) จะให้ความสนใจซึ่งมุ่งไปที่อาณาบริเวณที่อยู่ระหว่างสิ่งที่คาดคะเน**ได้**กับที่คาดคะเน**ไม่**ได้ อันเป็นการคาบเกี่ยวระหว่างความมีระเบียบ (order) กับความไม่มีระเบียบ (chaos) ดังนั้นก่อนที่จะผ่านไปกล่าวถึงเรื่องอื่นก็จะขอนำคำนิยามของคำว่า chaos มาแสดงในที่นี้เพื่อให้เกิดความแน่ชัดว่าจริง ๆ แล้วคืออะไรกันแน่ คำนิยามในภาษาอังกฤษเป็นดังนี้ :-

"A deterministic, nonlinear dynamic system that can produce random-looking results. A chaotic system must have a **fractal dimension** and must exhibit sensitive dependence on initial conditions"

สิ่งนี้เป็นของใหม่ซึ่งยังไม่ได้อธิบายก็คือ คำว่า fractal dimension ที่ผู้เขียนจะกล่าวในอันดับต่อไป

Fractal Dimension

ในขั้นต้นจะขอเริ่มจากสิ่งที่เป็นพื้นฐานที่สุดว่าพัฒนาการของคณิตศาสตร์ที่เรียกว่า fractal geometry นั้นถือว่าเป็นการค้นพบในทางคำนวณที่มีประโยชน์และน่าสนใจที่สุด เพราะการเริ่มต้นด้วยสิ่งที่เรียกว่า fractals ก็ทำให้นักคณิตศาสตร์สามารถสร้าง "ระบบ" ที่ใช้แสดงรูปลักษณะตามธรรมชาติ (natural shape) โดยอาศัยกฎเกณฑ์ง่าย ๆ เพียงไม่กี่ข้อ ความซับซ้อนที่เรียกว่า complexity สำหรับในที่นี้จึงเกิดจาก**ความเรียบง่าย** (simplicity) ดังกล่าว และหน้าที่ของ fractal ก็คือการก่อให้เกิดโครงสร้างสำหรับ complexity รวมทั้งการให้สิ่งที่เป็นความงดงาม (beauty) แก่ปรากฏการณ์ที่เป็น chaos นอกจากนี้ก็ยังมีความจริงที่ว่า nonlinear dynamic systems ก่อให้เกิด fractals ซึ่งจะมีประโยชน์สำหรับใช้พรรณารูปร่างต่าง ๆ ที่ฐานของธรรมชาติ (natural shapes) รวมทั้ง time series สรุปได้ว่าธรรมชาติจะมีพฤติภาพเป็น nonlinear โดยมี fractals ซึ่งทำหน้าที่เป็นเรขาคณิตสำหรับปรากฏการณ์ที่เป็น chaos

ความหมายของคำว่า fractal ก็คือการเป็นสิ่งใดสิ่งหนึ่ง (an object) ซึ่งประกอบด้วยส่วนย่อยต่าง ๆ ที่สัมพันธ์กับส่วนใหญ่ทั้งหมด (the whole) โดยเป็นไปในทางใดทางหนึ่ง นั่นก็คือองค์ประกอบต่าง ๆ แต่ละส่วนจะเหมือนกันเอง (self similar) ตัวอย่างก็มี เช่น การแตกกิ่งก้านของต้นไม้คือ แต่ละกิ่งที่เป็นช่วงต้น ๆ จะแตกต่างจากกิ่งเล็ก ๆ ที่ย่อยลงไป ซึ่งเมื่อมองรวมทั้งหมดก็จะแลเห็นความคล้ายคลึงกับ

โครงสร้างของต้นไม้ทั้งต้น (Each branch and each successive smaller branching is **different**, but all are qualitatively **similar** to the structure of the whole tree) จึงเห็นได้ว่าโลกทัศน์ที่เป็น fractal geometry จะแตกต่างกับ Euclidean geometry อย่างมาก อันเนื่องจากว่าวิธีการของ Euclid เป็นการจำลองธรรมชาติให้เหลือเพียงรูปทรงที่เรียบง่ายและได้ดุล (pure and symmetric objects) แต่ตามความเป็นจริงแล้วภายในธรรมชาติจะมีอะไรหลาย ๆ อย่างที่ไม่เป็น symmetry พอ ๆ กับการไม่มีความสมดุล (equilibriuns) เมื่อเป็นเช่นนี้วัตถุทางธรรมชาติ (natural objects) จึง**ไม่**ได้เกิดจากการนำโครงสร้างแบบ enclidean ชัดเกลาดังจะเห็นได้จากการสร้างคอมพิวเตอร์อิมเมจของภูเขาโดยใช้ euclidean geometry ว่าเป็นงานที่ต้องเขียนโปรแกรมที่ค่อนข้างยาวและต้องใช้ ROM มาก แต่ถ้าอาศัย fractal geometry ก็จะได้แผ่นภาพของภูเขาโดยสร้างกฎเพียงไม่กี่ข้อให้ทำหน้าที่ซ้ำ ๆ กัน ดังคำพูดของ Benoit Mandelbrot ผู้เป็นบิดาของ fractal geometry ที่ได้กล่าวว่า "ภูเขาไม่ได้มีรูปทรงเป็นกรวย (cones) และกลุ่มเมฆก็ไม่ได้สัญฐานเป็นทรงกลม"

ในวิชา euclidean geometry ถ้าใครเพ่งมองดูวัตถุอันหนึ่งมากขึ้นก็จะพบความเรียบง่ายที่ทวีมากขึ้น ในทางกลับกันวัตถุที่เป็นธรรมชาติ (natural object) จะเปิดเผยรายละเอียดมากขึ้นถ้ามีการเพ่งมองให้ไกลเข้าไปเรื่อย ๆ โดยรายละเอียดเช่นนี้จะ**เพิ่มมากขึ้น** จนแม้กระทั่งในระดับที่เล็กกว่าปรมาณูอันเป็นคุณสมบัติของ fractals คือถ้ายิ่งมองให้ใกล้มากเข้าไปเท่าใดก็ยิ่งจะเห็นรายละเอียดมากขึ้นเท่านั้น จากนี้ก็จะกล่าวถึงเรื่องของ fractal dimension ต่อไป

กระดาษหนังสือที่ผู้อ่านกำลังอ่านอยู่นี้อันที่จริงแล้วจะเป็นวัตถุสามมิติ และถ้าสมมติว่า กระดาษไม่มีความหนาก็สามารถอนุโลมให้เป็นแผ่นกระดาษที่เป็นสองมิติได้ หรือที่เรียกว่า euclidean plane และถ้าผู้อ่านได้ฉีกกระดาษจากเล่มหนังสือแล้วบีบให้เป็นก้อนกลม ๆ ก็จะได้ลูกบอลที่ทำด้วยกระดาษที่ไม่ใช่เป็นสองมิติอีกต่อไป แต่ในเวลาเดียวกันก็**ไม่**ได้เป็นสามมิติ เพราะลูกบอลนี้จะประกอบด้วย**ส่วนที่เป็นสัน** (creases) ในรูปของรอยพับของกระดาษ รวมทั้งส่วนที่เว้าเข้าไปจน**ไม่**สามารถเรียกได้ว่าเป็นสามมิติ (น้อยกว่าสามมิติ) และถ้าลูกบอลกระดาษนี้ถูกบีบให้แน่นมากเข้าเท่าใดก็จะใกล้ความเป็นสามมิติมากขึ้นเท่านั้น หรือมีสภาพเป็นของแข็ง (solid) อย่างหนึ่ง ลูกบอลที่เกิดจากบี้กระดาษเป็นก้อนกลมนี้จึงมีจำนวนมิติที่เป็น fractional หรือ "fractal" dimension ซึ่งเป็นตัวเลขที่ไม่ใช่จำนวนเต็ม (non-integer) จึงไม่สะดวกที่จะใช้ enclidean geometry มาแสดงมิติ และถ้าจะใช้วิชา calculus ก็ไม่ได้อีกเช่นกันเพราะผิวของลูกบอลที่เป็นกระดาษนี้ differentiate ไม่ได้ สิ่งที่เป็นวัตถุส่วนใหญ่มักจะไม่อยู่ในรูปของ solid แต่จะเต็มไปด้วยช่องว่างและสันเหมือนเช่นรอยพับยู่ยี่ของลูกบอลที่เป็นกระดาษที่**อาศัยอยู่ในโลกของสามมิติ** แต่**มิติ**ที่แท้จริงของวัตถุพวกนี้หรือวัตถุตามธรรมชาติโดยทั่วไปจึงมีค่าตัวเลขที่อยู่ระหว่าง 2 ถึง 3 ดังเช่น ภูเขา หรือปุยเมฆ การหาค่าตัวเลขที่เป็น fractal dimension จึงเป็นการหาว่าวัตถุจะเข้าไปกินเนื้อที่ในที่ว่าง (space) อย่างไร วัตถุที่มีสภาพเป็น fractal จะเข้าไปใช้เนื้อที่ในที่ว่างอย่างไม่สม่ำเสมอเพราะส่วนต่าง ๆ ของวัตถุเช่นนี้ได้มีความสัมพันธ์กัน การหา fractal dimension จึงต้องสอบวัดว่า วัตถุต่าง ๆ จับตัวเป็นก้อน (clump) กันอย่างไรในที่ว่างสามมิติ อนึ่งในกรณีที่สภาพของวัตถุธรรมชาติที่มีมิติใหม่เกิน 2 เช่น แนวชายฝั่งทะเล (coastlines) ค่า fractal dimension ก็จะอยู่ระหว่าง 1 กับ 2

fractal dimension จึงใช้แสดงว่ารูปทรงของวัตถุ (Shape) หรือ time series ได้ใช้ที่ว่างในโลกของสามมิติอย่างไร ลักษณะในการกินเนื้อที่ของวัตถุหรือของสิ่งใดสิ่งหนึ่ง ก็คำนวณได้จากแรงกำลังต่าง ๆ ที่เข้ามาเกี่ยวข้องในขณะที่มีการก่อตัวเป็นรูปเป็นร่าง (forces involed in its formation) ซึ่งถ้าเป็นกรณีของชายฝั่งทะเลที่เว้าแหว่งแรงดังกล่าวก็จะอยู่ในรูปของปรากฏการณ์ทางธรณีวิทยาที่เป็นแรงดันอันเนื่องมาจากกระแสน้ำและกิจกรรมที่เกิดจากภูเขาไฟ แต่สำหรับกรณีที่เป็น Time series ในเรื่องของ stock returns ข้อมูลในด้านเศรษฐศาสตร์จุลภาคและมหาภาคก็จะเข้ามามีอิทธิพลกับการรับรู้ของนักลงทุนว่าหุ้นตัวไหนจะให้ผลตอบแทนดี หุ้นตัวต่าง ๆ จะแสดงปฏิกิริยาต่าง ๆ กัน แม้ว่าข่าวสารที่ส่งผลกระทบจะมาจาก**ข้อมูลทางเศรษฐศาสตร์มหภาค** (waeroeconomic news) อันเดียวกันก็ตาม อันเนื่องจากข้อแตกต่างในด้านอุตสาหกรรม การทำบัญชี และเงื่อนไขอื่น ๆ ที่แตกต่างออกไปสำหรับแต่ละบริษัท ดังนั้นการนำแนวความคิดที่เป็น fractal dimension มาใช้ในกรณีนี้จึงไม่เหมาะในทางปฏิบัติ อันหมายความว่าจะต้องอาศัยสิ่งสนับสนุนในทางสถิติศาสตร์รวมทั้งจิตวิทยาให้ลึกล้ำขึ้นไปอีกจึงจะสามารถเข้าถึงปรากฏการณ์ในทางเศรษฐกิจ เช่น กรณีของตลาดเงิน ซึ่งก็ได้มีผู้ที่ทำการค้นคว้าเพื่อนำทฤษฎี chaos เข้ามาประยุกต์ในตลาดเงินในแง่ของ โดยได้นำเรื่องของ

- วัฏจักร (cycles)
- ราคา (prices)
- ความไม่แน่นอนของตลาด (market volatility) เข้ามาพิจารณา

ผลของการค้นคว้าเช่นนี้ได้มีปรากฏออกมาอย่างมากทั้งในรูปของบทความทางวิชาการของในต่างประเทศและที่เป็นตำราเช่น หนังสือเรื่อง **"Chaos and Order in the Capital Market"** ซึ่งเขียนโดย Edgar E.Peters ในปี 1991 ซึ่งผู้เขียนจะอาศัยตัวอย่างการคำนวณจากตำราเล่มนี้สำหรับในเรื่องของ nonlinear ที่จะกล่าวต่อไป

อนาคตที่ขึ้นกับปัจจุบัน ในโลกของ nonlinear

บทเรียนจาก butterfly effect ที่ลอเร้นซ์เป็นผู้ค้นพบและจะนำมาเน้นที่นี้ก็คือว่าระบบอันใดก็ตามที่มีพฤติกรรมซึ่งขึ้นกับ

เงื่อนไขในขั้นต้น (initial conditions) อย่างมาก ๆ ย่อมเป็นการเหลือวิสัยสำหรับมนุษย์ที่จะทำการพยากรณ์ความเป็นไปของระบบนั้น ๆ ความไม่แน่นอนเช่นนี้น่าจะเรียกได้ว่าเป็นของ**จำเป็น**สำหรับจักรวาล **แทนที่จะเป็นข้อยกเว้น** ดังเช่นในการพยากรณ์อากาศ ซึ่งจะพึ่งพาอุปกรณ์เครื่องวัดต่าง ๆ เพียงอย่างเดียวไม่ได้ แต่จะต้องรู้ว่าแหล่งอันเป็นที่มาของ chaos ก็คือการขาดตกบกพร่องของข้อมูล อันทำให้ต้องมีความรู้ในเรื่องของกฎธรรมชาติให้ดีที่สุด เพราะได้มีการพบว่า**ระบบ**นี่มีความผูกพันอย่างลึกซึ้งกับ**เงื่อนไขขั้นต้น**มักจะมีความอ่อนไหวในเรื่องของรูปแบบของสมการที่นำมาใช้ในการพยากรณ์สถานภาพต่าง ๆ คือ ถ้าสมการมีความไม่แม่นยำแม้เพียงน้อยนิดหรือเกิดมีการตกหล่นไปเพียงเล็กน้อย ก็จะทำให้ผลของการพยากรณ์หันเหไปในทางตรงข้ามกับความเป็นจริงในปริมาณที่ค่อนข้างมาก จากนี้ก็จะก้าวไปพูดถึงโลกของ nonlinear ที่ผู้เขียนได้เกริ่นในตอนต้นว่าได้เข้ามาเกี่ยวข้องกับ chaos อย่างไร

สิ่งที่เข้ามามีอิทธิพลกับมนุษย์ในปัจจุบันมักเกิดจากอดีต เมื่อเป็นเช่นนี้การคาดหวังต่าง ๆ ในอนาคตจึงเป็นผลมาจากประสบการณ์ที่ได้พบในระยะหลังสุดอันเป็นผลของ feedback ที่ว่าอดีตจะมีผลกับปัจจุบัน และปัจจุบันจะมีผลกับอนาคตซึ่งมักไม่ค่อยจะมีใครนำหลักการอันนี้ไปใช้มากนัก จนกระทั่งเมื่อไม่กี่ปีมานี้จึงได้มีการสนใจกันมากขึ้น เช่น ในโลกของการเงิน ความสำคัญของระบบที่เป็น feedback ที่แท้จริงจะเกิดจากการนำเอาแนวโน้มและสหสัมพันธ์ในระยะยาวเข้ามาเป็นข้อพิจารณาเพราะความทรงจำ (memories) ของเหตุการณ์ที่ผ่านมานานแล้วยังสามารถมีผลกับการตัดสินใจในปัจจุบัน อันมีผลทำให้กิจกรรมต่าง ๆ ใน**ทางโลก**มีความซับซ้อนมากขึ้นจนไม่สามารถหาคำตอบออกมาได้อย่างกะทัดรัด และสดสวย แต่จะเกิดมีคำตอบให้เลือกได้หลายทาง (multiple possible solutions) อันเป็นลักษณะของ nonlinear dynamic systems ที่ประกอบด้วย

- เงื่อนไขที่มีความห่างไกลจากความเป็นสมดุล (far from equilibrium conditions)
- กลไกในการ feedback ที่ขึ้นกับเวลา

สมการทางคำนวณที่เข้ามาสวมบทบาทในเรื่องข้างต้นก็คือ nonlinear differential eqnations ซึ่งมีความซับซ้อนและให้**คำตอบ**ออกมาหลายแนว โดยไม่ค่อยจะมีความสัมพันธ์ ซึ่งกันและกัน แต่ในโลกแห่งความเป็นจริง เรามักหนีปรากฏการณ์ที่เป็น nonlinear ไม่พ้น จึงจะขอยกตัวอย่างของสมการที่เป็นระบบ nonlinear อย่างง่าย ๆ ในเรื่องของการซื้อขายหุ้นซึ่งปรากฏอยู่ในตำราของ Edgar E.Peters ที่ผู้เขียนได้เกริ่นไว้แล้ว

สมมติว่าเรามีหุ้นที่มีราคาเท่ากับ P_t และขอนิยามต่อไปว่าเป็น penny stock selling ที่มีค่าน้อยกว่า 1 เหรียญ (ขออนุญาตใช้ตัวอย่างของต่างประเทศ) เนื่องจากว่าได้มีผู้ซื้อที่หลั่งไหลเข้ามาในตลาดอันทำให้เกิดความต้องการที่ทำให้ราคาของหุ้นเพิ่มขึ้นในอัตราที่เท่ากับ a ราคาในอนาคตของ P_t ในเวลา tH จะเพิ่มในลักษณะ

$$P_{(tH)} = aP_t \quad (1)$$

สมการข้างต้นได้แสดงในเฉพาะในแง่ของผู้ซื้อเท่านั้น ดังนั้นเพื่อให้เกิดความสมบูรณ์ก็จะต้องเพิ่มบทบาทของผู้ขายเข้าไปโดยสมมติว่าในขณะที่ราคาหุ้นเพิ่มเป็นปริมาณ aP_t ผู้ขายก็จะเข้ามาทำให้ราคาลดลงด้วยปริมาณที่เท่ากับ aP_t^2 สมการที่ 1 จึงกลายเป็น

$$P_{tH} = aP_t - aP_t^2 \quad (2)$$

หรือ

$$P_{tH} = aP_t(1-P_t) \quad (3)$$

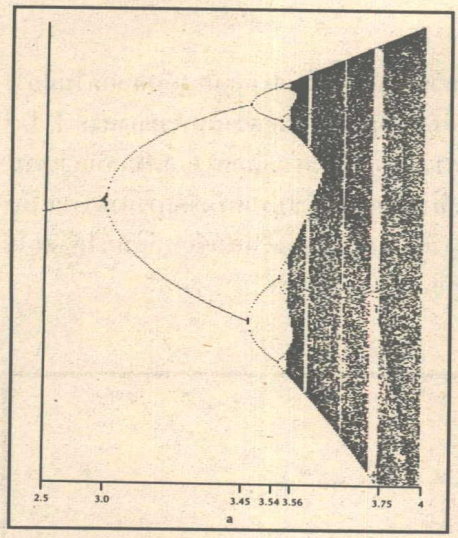
สมการง่ายข้างต้นได้บอกว่าเมื่อแรงของการซื้อได้ทำให้ราคาหุ้นเพิ่มในอัตราที่เท่ากับ a แรงของการขายก็จะเข้ามาลดราคาในอัตราที่เท่ากับ aP_t โดยในขณะที่แรงซื้อยังต่ำอยู่นั้น ราคาจะเข้าใกล้ศูนย์และระบบก็จะสลายตัวแต่สำหรับในระดับของแรงซื้อที่สูงขึ้น (และไม่มากนัก) ราคาก็จะวิ่งเข้าสู่สถานะที่เป็น steady state หรือ fair value

สมมติว่า แรงซื้อทำให้อัตราเติบโตโดยมีค่าเป็น a=2 และ P_0=.03 การคำนวณที่เป็น iteration ในสมการที่ (3) ก็จะให้ fair price ที่วิ่งเข้าสู่ 0.50 และถ้า a เพิ่มเป็น 2.5 ก็จะมี fair price ที่เป็นไปได้**สอง**ค่าด้วยกันและระบบก็จะเกิดมีการกวัดแกว่งระหว่าง**สอง**ค่านี้ คือในจุดที่เป็น critical level นี้ผู้ซื้อและผู้ขายไม่ได้เข้าสู่ตลาดอย่างเท่า ๆ กัน อันทำให้เกิดการโน้มถ่วงในปริมาณที่เท่ากับ aP_t^2 ซึ่งมีค่ามากกว่า a แต่ถ้าหากราคาได้เข้ามาอยู่ในทางต่ำก็จะทำให้อิทธิพลของ a มากกว่า aP_t^2 อันทำให้มีการดึงราคาให้สูงขึ้น และทั้งสองค่าของ fair values นี่ก็จะมีราคาหนึ่งที่ผู้ขายจะต้องขายและอีกราคาหนึ่งที่ผู้ซื้อจะซื้อ แต่ก็ไม่ได้หยุดเพียงแค่นี้

คือขณะที่อัตราเติบโต (a) เพิ่มเป็น 4, 16 และ 32 ก็จะเกิดมี fair value ต่าง ๆ ที่เป็นไปได้โผล่ขึ้นมา โดยเฉพาะเมื่อ a = 3.75 ก็จะเกิดมี fair value ที่เป็นไปได้เกิดขึ้นมาเป็นจำนวนนับไม่ถ้วน (รูปที่ 2) ของสมการระบบที่สร้างขึ้นมานี้ยังไม่มีกลไกที่จะมากำหนดว่า fair price คืออะไรจะเกิดการแปรปรวนอย่างไม่มีระบบ (fluctuates in a seemingly random, choastio fashion) สิ่งที่แสดงในรูปที่ 2 จะเป็น bifurcation diagram ซึ่งแสดง critical values ของอัตราเติบโตที่เท่ากับ a โดยจะเห็นว่าจำนวน fair values จะเพิ่มขึ้นเรื่อย ๆ จนสุดคณานับ คำว่า bifurgation จะหมายถึงค่าตัวเลขที่แตกออกจากจุดใดจุดหนึ่งโดยแยกออกเป็นสองแฉกหรือสองค่า

มองปัญหาเก่าด้วยทฤษฎีใหม่ล่าสุด

ตัวอย่างง่าย ๆ ที่เป็นที่มาของ Logistic Equaion ดังในสมการที่ (3) นั้นเป็นรูปแบบหนึ่งของ nonlinear dynamic systems **สิ่งแรก**ที่ปรากฏให้เห็นก็คือระบบที่เป็น feedback ซึ่งหมายความว่า สิ่งที่เกิดเมื่อวันวานจะมีอิทธิพล



รูปที่ 2 Bifurcation diagram ของสมการที่ (3) ซึ่งมีชื่อเรียกว่า Logistic Equation โดยอาศัยโปรแกรมที่แสดงไว้ในรูปที่ 3

Creating a Bifurcation Diagram

The BASIC program below provides for creating and examining the bifurcation diagram of the Logistic Equation The program requires two inputs, the beginning and ending values of a for the graph. As in the text, $0 < a \leq 1$. To view the full range of values, use $0.5 \leq a \leq 1$, because the lower values of a result in a straight line.

```
5   SCREEN 2
10  CLS : KEY OFF
15  PRINT "INPUT BEGINNING A:" : INPUT A
20  PRINT "INPUT ENDING A:" : INPUT A2
30  C=(1-A2)/200 : CLS    @INCREMENTS TO A TO FILL
      SCREEN@
40  X=.4    @INITIAL VALUE OF X@
50  FOR J = 1 TO 200
60  FOR I=1 TO 500
70   X=4*A*X*(1-X)
80   PSET ((740*X-100),J)    @PLOT POINT@
90   NEXT I
100 X=.4      @REINITIALIZE X@
110 A=A+C  @NEXT VALUE OF A@
120 NEXT J
130 END
```

รูปที่ 3 โปรแกรมที่ใช้ในการสร้างรูปที่ 2 ที่ได้จากตำราที่เขียนโดย Edgar E.Peters

กับวันนี้กล่าวอีกนัยหนึ่งก็คือ P_{i+1} เป็นผลของ P_i **ประการที่สอง**ก็คือการเกิดมีสิ่งที่เรียกว่า critical levels อันหมายถึงการสามารถมี equilibrium ได้มากกว่าหนึ่งแห่ง แห่งแรกตามใน **สมการที่สาม** ก็คือ เมื่อ a=2.5 ประการที่สามก็คือการเกิดมีระบบที่เป็น fractal ดังแสดงไว้ในรูปที่ 2 คือเมื่อ a=3.75 ก็จะเกิดมีแถบของตัวเลขที่เป็น band of stability ขึ้นมา และภายในแต่ละ figure ของ band ดังกล่าวก็จะมี figare ที่เล็กกว่าอยู่ภายในนั้น โดยมีลักษณะที่เหมือนกับ figure ที่ใหญ่กว่า ซึ่งถ้านำ figure ขนาดเล็กดังกล่าวมาขยายก็จะมี band of stability อื่นบรรจุอยู่ ฯลฯ อันเป็นที่มาของคุณสมบัติที่เรียกว่า self similar ที่ติดมากับระบบที่เป็น nonlinear dynamic ซึ่งเป็นอาการของ nonlinear feedback process ความซับซ้อนแบบนี้จะเกิด เมื่อระบบอยู่ห่างไกลจากสภาวะสมดุลย์ (equilibriuns)

เรื่องที่สำคัญมาก ๆ อีกเรื่องซึ่งเกี่ยวกับระบบที่เป็น nonlinear (เช่น สมการที่ (3)) ก็คือ ความไวตัวกับเงื่อนไขขั้นต้น คือถ้าสมการที่ 3 ได้กลายเป็น โมเดลในการพยากรณ์เมื่อใดก็จะเกิดผลขึ้นมาว่าการเปลี่ยนแปลงเพียงเล็กน้อยใน P_i จะทำให้เกิดมี "ราคา" ที่แตกต่างกันมากในควบเวลา t+n แม้ว่าจะมีการ "ปิด" ในตอนเริ่มต้น จึงสรุปได้ว่าสำหรับในกรณีของตลาดเงินที่เป็น nonlinear dynamic systems นี้จะมีสิ่งที่ต้องคำนึงถึง ซึ่งประกอบด้วย

- สหสัมพันธ์และแนวโน้มในระยะยาว (feedback effects)
- ตลาดที่มีแต่ความสับสน (critical levels) ซึ่งอยู่ภายใต้เงื่อนไขต่าง ๆ และในบางช่วงเวลา
- มี time series ของผลตอบแทน ซึ่งในช่วงเวลาสั้น ๆ ก็ยังดูคล้ายคลึงกันและความคล้ายคลึงเช่นนี้ยังมีต่อไปอีกในแง่ของลักษณะทางสถิติ (fractal structure)
- ยิ่งไกลออกไปในอนาคตก็ยิ่งได้ผลการพยากรณ์ที่เชื่อถือได้น้อยลง (ความไวตัวกับเงื่อนไขขั้นต้น)

สรุป

สาเหตุที่จำเป็นต้องมองปัญหาอันเก่าแก่ด้วยแนวความคิดอันใหม่ เช่น กรณีของ chaos กับ complexity ก็เพราะว่าทฤษฎีใหม่ ๆ ได้เข้ามามีส่วนให้สามารถเห็นสิ่งต่าง ๆ ได้กว้างขึ้นในรูปของ generalization ซึ่งแม้ว่าจะเข้ามาทำให้การทำความเข้าใจปรากฏการณ์ต่าง ๆ (เช่น การตลาดและเศรษฐกิจ) เป็นไปอย่างยากมากขึ้น แต่ก็ทำให้มนุษย์ก้าวไปสู่ความเป็นจริงได้มากกว่าในอดีต อันทำให้มีทั้งความตื่นเต้นและน่ากลัว เกิดขึ้นพร้อม ๆ กัน ที่ว่าน่าตื่นเต้นก็เพราะสามารถทำให้แลเห็นและเข้าใจธรรมชาติได้ลึกซึ้งขึ้น และที่ว่าน่าสพรึงกลัวก็เพราะการค้นพบในด้าน chaos และ complexity เท่าที่ได้กล่าวมานี้ได้แสดงว่ายังมีงานค้นคว้าและพัฒนาอยู่อีกมากมายที่รออยู่ข้างหน้า